# BEMÆRKNINGER

MED HENSYN TIL

# DEN GEOMETRISKE FREMSTILLING

## AF LÆREN OM DIFFERENTIALLIGNINGERS SÆRDELES OPLÖSNINGER.

AF

*CHR. JÜRGENSEN,*
FULDMÆGTIG VED SÖE-ETATENS SPORTEL-CASSERER EMBEDE.

Det har længe været en erkjendt Sandhed, at Anvendelsen af Analysen paa Geometrien er et af de gavnligste Midler til at kaste Lys over de analytiske Undersögelser. Denne Forbindelse af Undersögelserne med en Gjenstand for Indbildningskraften, hvorved man, saa at sige, iværksætter Tankeforsög for yderligere at bekræfte de Resultater, til hvilke man er kommen ved reen Analyse, har været anvendt næsten i alle de Grene af Analysen, hvor man, formedelst det indskrænkede Antal af foranderlige Störrelser, har kunnet indföre den.

Imidlertid have Mathematikerne i Theorien af Differentialligninger med to foranderlige Störrelser, saavidt jeg veed, kun anvendt to Dimensioner, endskjöndt Betragtningen af tre, idet man antog en Function af den vilkaarlige Constante for den tredie, kunde, synes mig, kaste noget Lys derover, især deleshed over Theorien af Differentialligningers særdeles Oplösninger (*solutions particulières*); thi den Forandring af den vilkaarlige Constante, der ligger til Grund for denne Theorie, er Intet andet, end en Overgang fra et Snit i en Overflade til et andet.

Jeg vover derfor at forelægge det Kongelige danske Videnskabernes Selskab nærværende Bemærkninger over denne

Gienstand, endskjönt jeg kun altfor vel indseer, at de ingenlunde kunne betragtes som noget Fuldstændigt, men i det höieste som Exempler paa denne Maade at raisonnere.

Jeg har især beskjæftiget mig med de særdeles Oplösninger af Ligninger af förste Orden, og kun tilföiet Lidet om dem af anden Orden, da Betragtningen af Overflader ikke kaster synderligt Lys over Theorien af disse Ligningers særdeles Oplösninger.

## Om de særdeles Oplösninger af Differentialligninger af förste Orden.

I Almindelighed være

$$1,\ f(x, y, z) = 0$$

Ligningen for en hvilkensomhelst Overflade. Naar man differentierer denne Ligning med Hensyn til x og y alene, erholder man en Ligning:

$$2,\ f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z\right) = 0,$$

som giver Værdien af den trigonometriske Tangent til Inclinationsvinkelen af en hvilkensomhelst Tangent, der berörer Overfladen og er parallel med Planen x, y. Eliminerer man dernæst z imellem de to ovenstaaende Ligninger, vil man erholde en ny Ligning:

$$3,\ f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

som paa eengang vil indeholde Udtrykket for alle disse Tangenter, og som vil være den almindelige Differentialligning af Ligningen (1), tagen saaledes, at man betragter z, som den vilkaarlige Constante.

Nu vil det i Almindelighed være muligt, at fyldestgjöre Ligningen (3), paa to forskjellige Maader:

1) i det man betragter z, som en *vilkaarlig Constant*, og antager Ligningen (1,); thi man betragter da alle Tangenterne for et Snit, der er parallelt med Planen x, y, og man vil betragte alle disse Snit efter hinanden, i det man giver z alle mulige Værdier fra $-\infty$ til $+\infty$. Dette giver den almindelige Integralligning;

2) men det er klart, at man ogsaa kan fyldestgjöre Ligningen (3) overeensstemmende med Continuitetsloven, naar det er muligt at gaae over fra et *hvilketsomhelst* af de med Planen x, y parallele Snit til det *umiddelbart* fölgende uden at forandre x eller y. Men dette fordrer öiensynligt, at der findes i disse to Snit i det mindste to Puncter, det ene i det förste Snit og det andet i det andet, som ere beliggende i een og samme, paa Planen xy lodrette, Linie. Overgangen fra det ene af disse Snit til det andet udtrykker Analysen ved Substitutionen af $z + dz$ istedetfor z i Ligningen (1), hvorved erholdes en Ligning, der ved Ligningen (1) reduceres til dennes Differential med Hensyn paa z alene, nemlig

$$f'_{(z)}(x, y, z)\, dz = 0$$

og dernæst til

$$4,\quad f'_{(z)}(x, y, z) = 0$$

det z er antagen variabel. Eliminerer man z imellem denne og Lign. (1), erholdes en Ligning

$$5,\quad \varphi(x, y) = 0,$$

som betegner Projectionen paa Planen x y af den Curve, der er dannet af alle Overgangspunkterne, hvilken Curve i Almindelighed er af dobbelt Krumning. Fremdeles er det klart, at en hvilkensomhelst Tangent til Overfladen, der er parallel med Planen x, y og trukken i et hvilketsomhelst Punkt i denne Curve, ogsaa indeholdes blandt dem, der indeholdes i Ligningen (3). Men alle disse Tangenter, hvoraf enhver svarer til to, uendelig nær ved hinanden liggende Snit, have deres Paralleler i Planen x y, hvor de Vinkler, som de danne med x-Axen, ere de tilsvarende Tangenters Böiningsvinkler mod Planen x z; saa at det er öiensynligt, at hiin Curves Projection paa Planen x y ogsaa fyldestgjör Differentialligningen (3), omendskjönt denne Oplösning er af en uendelig ringere Udstrækning end den almindelige Integralligning. — Dette er hiin Differentiallignings særdeles Oplösning.

Den Maade, paa hvilken vi ere komne dertil, er forövrigt aldeles overeensstemmende med *Lagranges* bekjendte Methode for at udlede de særdeles Oplösninger af de primitive Ligninger.

Vi have ovenfor bemærket, at man fyldestgjör Ligningen (3), naar man kan gaae over fra ethvert Parallelsnit til det fölgende uden at forandre x eller y. Dette er tillige Betingelsen for at Differentialligningen kan fyldestgjöres ved en særdeles Oplösning. Thi, naar denne Overgang ikke er mulig, saa kan man heller ikke differentiere Ligningen (1) med Hensyn paa z alene. Man maa altsaa ved Differentiationen komme til et urimeligt Resultat. Man tage til Exempel Ligningen for en Plan,

$$ax + by + cz + d = o,$$

og man vil erholde

$$c = o,$$

en absurd Ligning, naar Planen ikke er perpendiculair paa Planen x y.

I det Tilfælde, at der i ethvert Snit findes flere, f. Ex. stedse 2 Punkter, hvor man kan forandre z uendelig lidet, uden at forandre x eller y, ere der ogsaa 2 Curver med dobbelt Krumning, som indeholde særdeles Oplösninger. I Almindelighed, naar, for et hvilketsomhelst Antal af Curver,

$$6, \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 (x, y) = o \\ \psi_2 (x, y) = o \\ \psi_3 (x, y) = o \quad \text{o. s. v.} \end{array} \right.$$

ere Ligningerne for disse Curvers Projectioner, saa er det klart, at enhver af disse Ligninger især, ligesom og deres forskiellige Producter, gjöre den fremsatte Differentialligning identisk.

Det kunde ogsaa være Tilfældet, at man i hele Udstrækningen af en Overflade kunde gaae fra Snit til Snit uden at forandre x og y, og det paa en Uendelighed af Maader. Dette er Tilfældet for enhver Overflade, hvis Ligning er

$$7, \; f(x, y) = o;$$

thi det er öiensynligt, at, da z ikke indgaaer heri, vil enhver Linie, som drages paa Overfladen, fyldestgjöre den ovenangivne Betingelse. Men Projectionerne af disse Linier, som forresten alle ere givne ved Ligningen (7), kunne ikke betragtes som særdeles Oplösninger af Differentialet af denne Ligning; thi Integralet af dette Differential vil have Formen

$$8, \; f(x, y) = \varphi(z)$$

efter hvilken man maatte söge de særdeles Oplösninger.

Der er, som man veed af *Lagranges* Theorie (*Leçons sur le calcul des fonctions*, Paris 1806, pag. 181) to Tilfælde, i hvilke man ikke finder en særdeles Oplösning, men et særdeles Integral (*intégrale particulière; Lacroix traité du calc. diff. et du calc. int.* 2de ed., Tome 2, pag. 373 note), nemlig:

1) naar Differentiationen med Hensyn til den vilkaarlige Constante z giver for z een eller flere constante Værdier. I dette Tilfælde er det klart, at man ikke kan gaae over fra et Snit til et andet uden paa eet eller flere enkelte Steder, men at derimod paa disse Steder Overgangen kan skee i alle Snittets Punkter; det er at sige, den ene af de Flader, der bestemme den Curve, hvis Projection giver den særdeles Oplösning, er en Plan, der er parallel med Planen x, y, og den anden er den givne Overflade. Det er altsaa öiensynligt, at man falder tilbage paa et særdeles Integral.

2) Naar Differentiationen med Hensyn til z giver

$$9, \quad z = F(x, y)$$

i det F betegner en hvilkensomhelst Function, som ikke reducerer sig til en Constant; men derimod Substitutionen af denne Function i den givne Ligning giver en Ligning imellem x og y, til hvilken man ligeledes kommer ved at sætte en vis constant Værdie for z i den givne Ligning. I dette Tilfælde er den særdeles Oplösning bestemt ved 2 Ligninger, som begge höre til krumme Overflader; man erholder altsaa en egentlig særdeles Oplösning (ɔ: en Curve af dobbelt Krumning i Almindelighed), men hvis Projection paa Planen x y har samme Ligning, som Projectionen af et af Snittene i Overfladen ved en Plan, der er parallel med Planen $xy$.

Disse to Tilfælde ere altsaa væsentlig forskiellige.

---

Vi ville anvende det Foregaaende paa nogle Exempler. Man antage

$$10, \quad y^2 + xz = 0,$$

som er en Ligning for en Overflade hvor alle Snit, parallele med Planen $xy$, ere Paraboler. Ved at differentiere efter $z$ findes

$$11, \quad x = 0,$$

hvilket giver:

$$12, \quad y^2 = 0$$

nemlig Ligningerne for Coordinaternes Begyndelsespunkt, ved Hielp af hvilke man ogsaa fyldestgjör Differentialligningen:

$$13, \quad y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0.$$

Her reducerer Overgangslinien sig til en ret Linie, der er perpendiculair paa Planen $xy$, eller rettere, ifölge den dobbelte Ligning

$$14, \quad y^2 = 0,$$

til to rette Linier, der ere parallele og uendelig nær hinanden, samt gaae igjennem y-Axen i Coordinaternes Begyndelsespunkt lodret paa Planen $xy$.

Det næste Exempel være Ligningen for en ret Cylinder med circulair Basis:

$$15, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Her finder ingen særdeles Oplösning Sted; dette er det pag.

113 omtalte Tilfælde, hvilket er undtaget fra Theorien om de særdeles Oplösninger. Men, antager man, at Centrernes Linie forandrer Retning, saa vil der kun være visse Steder, hvor man kan gaae over fra Snit til Snit uden at forandre x eller y. Man vil altsaa strax have en særdeles Oplösning. Man antage f. Ex. det simpleste Tilfælde:

$$16,\quad (x-z)^2 + (y-z)^2 = R^2$$

Differentieres efter z, erholdes

$$17,\quad x + y - 2z = 0$$

og ved at eliminere z

$$18,\quad (x-y)^2 = 2R^2,$$

eller

$$19,\quad y = x \pm R\sqrt{2}$$

som er den særdeles Oplösning, der let lader sig construere. — Denne er altsaa to rette Linier, der ere Projectioner af to plane Curver i Rummet. For at finde om disse ere rette Linier, bemærke man, at deres Ligninger ere Ligningerne (16) og (17). Eliminerer man altsaa een af Störrelserne x og y imellem dem, erholder man Projectionen paa Planen y z eller x z, og, da Ligningerne ere symmetriske med Hensyn paa x og y, findes samme Resultat i begge Tilfælde. Substituerer man f. Ex. Værdien af y, tagen af den 2den Ligning i den 1ste, saa har man

$$20,\quad z = x \pm \frac{R}{\sqrt{2}},$$

som let construeres. Man finder saaledes to rette Linier, der ere parallele med den Linie, der forbinder Cirklernes Centrer. Tages Differentialligningen af Lign. (16), i det z betragtes, som arbitrair Constant, erholdes

$$21,\quad (x-y)^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=R^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2$$

der, som man seer, fyldestgjöres ved Lign. (19).

Ligningen (15) svarer til en hvilkensomhelst opgiven særdeles Oplösning, naar man derefter bestemmer $\alpha$ og $\beta$, som Functioner af $z$. Skal f. Ex. den særdeles Oplösning være en Cirkel, hvis Centrum er i Coordinaternes Begyndelsespunkt, saa behöver man blot at antage:

$$22,\quad \alpha^2+\beta^2=1,$$

i det Radius antages $=1$.

Man kan da sætte

$$23,\quad \alpha=\sin z,\ \beta=\cos z$$

altsaa

$$24,\quad (x-\sin z)^2+(y-\cos z)^2=R^2,$$

hvoraf uddrages

$$25,\quad x^2+y^2=(1\pm R)^2,$$

som særdeles Oplösning af Differentialligningen af Lign. (24.)

De to Ligninger for den tilsvarende Curve med dobbelt Krumning ere:

$$26,\quad y=(1\pm R)\cos z$$

$$\text{og}\quad 27,\quad x=(1\pm R)\sin z\ .$$

Vi have ovenfor (pag. 114, 115) sagt, at der ere to *forskjellige* Tilfælde, i hvilke den særdeles Oplösning indeholdes i det almindelige Integral. I det förste Tilfælde have vi seet, at der egentlig ikke er nogen særdeles Oplösning tilstede; i det andet derimod finder denne Oplösning Sted, men Projectionen falder sammen med Projectionen af et eller flere Snit, som gjö–

res i Overfladen parallelt med Planen x y. Vi ville give Exempler herpaa.

For det förste Tilfælde tage vi en hvilkensomhelst Omdreiningsoverflade

$$28,\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\phi z)^2$$

i det $\alpha$ og $\beta$ ere to Constanter og $\phi$ en hvilkensomhelst Function. Differentieres denne Ligning med Hensyn paa $z$, findes

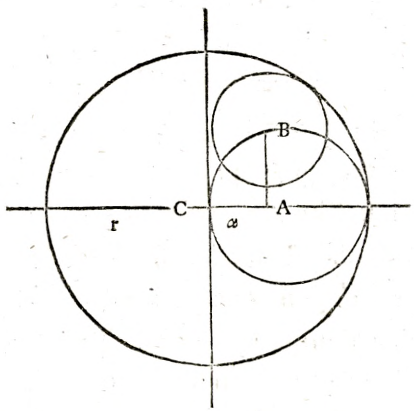
$$29,\quad \phi' z = 0$$

hvilken Ligning kun kan have Sted naar $z$ har een eller flere constante Værdier. Man vil bemærke, at Ligningen (29) giver alle maxima, minima og Inflexionspunkter, hvor Tangenten er parallel med Abscisseaxen for Curven

$$30,\quad y=\phi z$$

ɔ: alle de Steder, hvor der findes to ligestore og uendelig nær ved hinanden liggende Cirkler, saa at man kan gaae over fra den ene til den anden uden at forandre x eller y.

For det andet Tilfælde tænke man sig fölgende Exempel:



C være Coordinaternes Begyndelsespunkt, og de to Cirkler A og C, hvoraf den förstes Radius er halv saa stor, som den andens, være givne og ubevægelige. Vi tænke os endvidere den bevægelige Cirkel B, hvis Centrum altid er paa Omkredsen af A, og som bestandig berörer Cirkelen C. Ligningen for Cirkelen B vil da altid være:

$$31, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \sqrt{r\alpha - \alpha^2})^2 = (r - \sqrt{r\alpha})^2$$

(De to Radicaler medföre tre andre Cirkler, to udenfor Omkredsen af C og een tilsvarende til Cirkelen B).
Antages $\alpha = r \cos z$ f. Ex., erholdes

$$32, \quad (x - r\cos z)^2 + (y - r\sqrt{\cos z - \cos z^2})^2 = r^2 (1 - \sqrt{\cos z})^2$$

Denne Overflade vil, efter den Maade, paa hvilken den fremkommer ved Bevægelsen af Cirkelen B, have den Egenskab, at dens Differentialligning ($z$ antagen constant) fyldestgjöres ved Ligningen for Cirkelen C, *som særdeles Oplösning*, endskjönt denne særdeles Oplösning ikke er denne eneste; men, at den er indbefattet i det fuldstændige Integral (32), indsees let; thi antages

$$33, \quad z = \frac{2n+1}{2}\pi$$

naar n er et heelt Tal, saa har man

$$34, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

som er Ligningen for Cirkelen C. Forresten forbigaae vi den noget vidtlöftige Regning, og bemærke blot, at dette Tilfælde er væsentlig forskjelligt fra det foregaaende, efterdi her findes en virkelig særdeles Oplösning, eller en saadan Overgang fra ethvert Snit i Overfladen til det næste, som oven er omtalt, hvorimod denne i det foregaaende Tilfælde kun fandtes paa enkelte

Steder og i alle Punkter af Snittet, hvorfor og Differentiationen maatte give z = en constant Störrelse.

---

Med Hensyn paa Ligningen (15) har jeg en Bemærkning at gjöre. Da det blot er *Relationen* imellem $\alpha$ og $\beta$, der bestemmer *Projectionen* af Centrets Gang, saa er det klart, at man kan substituere hvilkesomhelst Functioner af z istedet for $\alpha$ og $\beta$, og dog finde samme særdeles Oplösning, blot under den Forudsætning, at man beholder den samme Relation imellem $\alpha$ og $\beta$, men det er klart, at Overgangslinien selv afhænger af de valgte Functioner.

I Almindelighed være

$$35, \quad F\,(x, y) = o$$

Ligningen for en given Curve, der foruden x og y kan indbefatte et vilkaarligt Antal Constanter. Naar man forandrer x til $x + \alpha$ og y til $y + \beta$, saa forandres Curvens Form ikke, endskjönt $\alpha$ og $\beta$ ere tilstrækkelige til at udlede en Differentialligning, der har en given særdeles Oplösning. Man behöver kun at indföre den nödvendige Relation imellem $\alpha$ og $\beta$ og dernæst substituere $f\,(z)$ istedetfor $\alpha$, idet $f$ er vilkaarlig, efterdi den særdeles Oplösning kun er *Projectionen* af en Curve, der fölgelig kan forandres paa uendelig mange Maader. Man kan saaledes give Betingelser, der bestemme $f$.

Denne vilkaarlige Function vil före til nogle Bemærkninger om Overflader, der kunne fremtilles ved almindelige Differentialligninger imellem x, y og $\frac{dy}{dx}$. Men iforveien vil jeg noget nöiere betragte den Linie paa en ved en primitiv Ligning given Overflade, hvis Projection danner den særdeles Oplösning af hiin Lignings Differentialligning, i det een af Coordinaterne tages til vilkaarlig Constant, samt de forskjellige Linier af dette Slags, der kunne fremkomme ved en Forandring af Coordinater.

Först lægge vi Mærke til, at den Curve med dobbelt Krumning, som ovenfor er betragtet, ikke er andet, end den Linie, i hvilken en paa Planen x, y perpendiculair cylindrisk Overflade berörer den givne Overflade.

$$36,\quad f(x, y, z) = 0$$

være nemlig Ligningen for den givne Overflade. Naar man differentierer den, har man

$$37,\quad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0\,.$$

Ligningen for en cylindrisk Overflade, der berörer den givne, er da

$$38,\quad F(x - az,\ y - bz)$$

i det $F$ er en Function, som man erholder ved at eliminere x y og z ved Hjelp af de 4 Ligninger

$$39,\quad \left\{\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ aX + bY + Z = 0 \\ x - az = \alpha \\ y - bz = \varphi\alpha\,. \end{array}\right.$$

(See *Monge's application de l'analyse à la géometrie pag.* 9).

Antager man dernæst

$$40,\quad a = 0,\ b = 0\,,$$

hvorved den cylindriske Overflade bliver perpendiculair paa Planen x, y, saa har man

$$41,\quad Z = 0\,.$$

Elimineres altsaa z imellem denne Ligning og Lign. (36), saa fremkommer Ligningen for Projectionen paa Planen $x y$ af den Curve, som den cylindriske Flade har tilfælles med den givne. Men denne Fremgangsmaade er aldeles den samme, som den, *Lagrange* anvender for at finde den særdeles Oplösning med Hensyn paa den arbitraire Constante $z$.

Vi ville nu betragte andre Beröringslinier, som kunne fremkomme ved en Coordinat-Transformation.

$$42,\quad f(x, y, z) = 0$$

være, som för, Ligningen for den givne Overflade. Transformeres Coordinaterne $x$ og $y$ ved at antage:

$$43,\quad \begin{cases} x = x_1 \cos p - y_1 \sin p \\ y = x_1 \sin p + y_1 \cos p, \end{cases}$$

saa forvandles Ligningen (42) til

$$44,\quad f(x_1 \cos p - y_1 \sin p,\ x_1 \sin p + y_1 \cos p,\ z) = 0$$

Naar man differentierer denne Ligning med Hensyn til $x$ f. Ex. og eliminerer dernæst $x$, saa erholdes en Ligning

$$45,\quad \varphi(y_1, z, \cos p) = 0,$$

som fremstiller en cylindrisk Overflade, der er lodret paa Planen $y_1\ z$ og berörer den givne Overflade. Indsættes nu istedet for $y_1$ Værdien:

$$46,\quad y \cos p - x \sin p,$$

som Lign. (43) give, saa findes en Ligning,

$$47,\quad \varphi(y \cos p - x \sin p, z, \cos p) = 0,$$

som hörer til en cylindrisk Overflade, der, efter *Monge's* Terminologie, er en *Enveloppée* til den givne, og som er parallel med Planen $x y$, og i Henseende til sin Stilling varierer med Værdien af $p$. Hvis man altsaa differentierer denne Ligning med Hensyn paa $p$, og dernæst eliminerer $p$, saa vil man, efter

*Monge's* Theorie (see hans *application de l'analyse à la géométrie*) erholde Ligningen for den givne Overflade. Saaledes giver altsaa Ligningen (47) den saakaldte *Enveloppée* for Overflader, der frembringes derved, at en cylindrisk Overflade dreier sig i alle Stillinger, i det den bestandig forbliver parallel med en given Plan (Planen x, y).

Man tage til Exempel Ligningen for en Ellipsoïde,

$$48,\quad b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$$

(See *Monge appl.* pag. 121 og fölg.)

Antages

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos p - y_1 \sin p \\ y &= x_1 \sin p + y_1 \cos p \end{aligned}\right\} (43)$$

saa erholdes

$$49,\quad (b^2 c^2 \cos^2 p + a^2 c^2 \sin^2 p)\, x_1^2 + (b^2 c^2 \sin^2 p + a^2 c^2 \cos^2 p)\, y_1^2 + 2\, c^2 \cos p \sin p\, (a^2 - b^2) \times x_1\, y_1 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$$

Differentieres dernæst med Hensyn til $x_1$, findes

$$50,\quad (b^2 \cos^2 p + a^2 \sin^2 p)\, x_1 + \cos p \sin p \times (a^2 - b^2)\, y_1 = 0,$$

som er Ligningen for en ret Linie, hvoraf sees, at Beröringslinien er en plan Curve. Elimineres $x_1$ ved Hjelp af Lign. (49), saa erholdes, efter behörig Reduction:

$$51,\quad c^2 y_1^2 + (b^2 \cos^2 p + a^2 \sin^2 p)\, z^2 = (b^2 \cos^2 p + a^2 \sin^2 p)\, c^2,$$

som er Ligningen for en Ellipse, hvis Axer ere

$$2\, c \quad \text{og} \quad 2 \sqrt{b^2 \cos^2 p + a^2 \sin^2 p}\,.$$

Substituerer man nu istedet for $y_1$ Værdien

$$y \cos p - x \sin p,$$

dividerer med $\cos^2 p$ og antager $\operatorname{tg} p = n$, erholdes:

$$52, \quad c^2 (y - nx)^2 + (b^2 + n^2 a^2)(z^2 - c^2) = o;$$

som er Ligningen for den cylindriske *Enveloppée*, som er parallel med den rette Linie i Planen $xy$, hvis Ligning er

$$53, \quad y = nx.$$

Differentieres Ligningen (52) med Hensyn til $n$, findes

$$54, \quad a^2 z^2 n - c^2 (y - nx) x = a^2 c^2 n$$

hvoraf uddrages Værdien af $n$, der indsættes i Lign. (52), hvorved erholdes, efter Multiplication med Nævneren

$$55, \quad [a^2 z^2 - a^2 c^2]^2 c^2 y^2 + [b^2 (c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2)^2 + c^4 x^2 y^2 a^2] (z^2 - c^2) = o,$$

som ved Division med $z^2 - c^2$ reduceres til

$$56, \quad a^2 c^2 y^2 (c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2) + b^2 (c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2)^2 = o,$$

saa at den kan divideres med $c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2$ og giver Ligningen (48) for Ellipsoïden.

Herved kan man bemærke, at i Ligningen (55) findes de to Factorer

$$c^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 c^2 \text{ og } z^2 - c^2$$

af hvilke den förste er indfört ved Multiplication og den anden betegner to parallele Planer

$$z + c = o$$

$$\text{og} \quad z - c = o,$$

som ogsaa dannes ved Cylindrets Omdreining.

Ligningen (47) kan, som svarende til en cylindrisk Overflade, der er parallel med Planen $x, y$, altid udtrykkes saaledes:

$$57, \quad z = \psi (y - \alpha x)$$

i det $\alpha = \operatorname{tang} p$.

Man finder let denne Ligning, naar man kjender det fuldstændige Integral af en Differentialligning, der, naar x antages constant, svarer til den opgivne Overflade. Hvis man kunde finde den ved blot at kjende Differentialligningen, saa vilde man strax have Integralet ved at differentiere med Hensyn paa $\alpha$ og dernæst eliminere denne Störrelse. Betragtes Formen af Functionen $\psi$, saa indsees, at den altid maa være bestemt, naar man ikke giver $\alpha$ nogen bestemt Værdie. Men i dette Tilfælde kan man give Functionen $\psi$ forskjellige Former, og saaledes danne meget forskjellige Ligninger, hvis Differentialligninger alle have den samme særdeles Oplösning. Man antage nemlig

$$58, \quad z = \psi\,(y - \alpha x) + (\alpha - b)\,\phi\,(y - \alpha x)$$

i det $\phi$ er en hvilkensomhelst Function. Antages $\alpha = b$, saa er

$$59, \quad z = \psi\,(y - bx)$$

Dersom man altsaa eliminerer $\alpha$ af Ligningerne (57) og (58) ved Hjelp af deres Differentialer med Hensyn paa $\alpha$, saa ville de to deraf fremgaaende Ligninger

$$60, \quad \Psi_1\,(x, y, z) = 0$$

$$\text{og} \quad 61, \quad \Psi_2\,(x, y, z) = 0$$

give tvende Overflader, der begge beröres af et Cylinder, hvis Ligning er

$$z = \psi\,(y - bx)$$

Naar man altsaa, efter at have transformeret Coordinaterne saaledes, at Linien $y = bx$ bliver x-Axe, söger den særdeles Oplösning med Hensyn til x som vilkaarlig Constant, saa vil man erholde den samme Oplösning, hvad enten man betragter Ligningen (60) eller (61). Men, da Functionen $\phi$ er vilkaarlig, vil man saaledes kunne finde en Uendelighed af Ligninger, der alle have samme særdeles Oplösning.

Ligeledes sees, at den til fölgende *Enveloppée*

62, $z = \psi(y - \alpha x) + (\alpha - b_1)(\alpha - b_2) \ldots . \phi(y - \alpha x)$

svarende *Enveloppe* beröres af de cylindriske Overflader, hvis Ligninger ere:

$$63, \quad \begin{cases} z = \psi(y - b_1 x) \\ z = \psi(y - b_2 x) \end{cases}$$

o. s. v.

Vi gaae nu over til Betragtningen af Overfladers Fremstilling ved almindelige Differentialligninger med 2 Foranderlige;

$$64, \quad f(x, y, \phi z) = 0$$

være Ligningen for en hvilkensomhelst Overflade. Naar man differentierer den med Hensyn paa x og y og eliminerer dernæst $\phi z$, saa vil Differentialligningen

$$65, \quad \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

svare til alle de Overflader der indeholdes i Lign. (64), hvilken Form $\phi$ end har.

Saaledes fremstiller Ligningen

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

en hvilkensomhelst Omdreiningsoverflade, og udtrykker ligesaavel denne Egenskab, som dette Slags Overfladers partielle Differentialligning. Dens Integralligning indeholder ogsaa en vilkaarlig Function; thi man har

$$x^2 + y^2 = \phi z,$$

i det $\phi$ er vilkaarlig.

Paa samme Maade udtrykker Ligningen

$$dy = a\,dx$$

en cylindrisk Overflade og saaledes videre.

Endvidere bemærke man, at enhver Differentialligning af förste Orden med to Foranderlige kan henföres til en partiel Differentialligning af förste Orden og lineair.

Man antage nemlig först en Ligning af 1ste Grad med Hensyn til $\frac{dy}{dx}$:

$$66,\quad P\,dy - Q\,dx = 0\,.$$

M være den Factor, hvorved den integreres, saa at

$$67,\quad \frac{d\,(PM)}{dx} + \frac{d\,(QM)}{dy} = 0\,.$$

Endvidere være

$$68,\quad f(x, y) = \varphi z$$

dens Integral, i det $\varphi$ er arbitrair, saa er

$$69,\quad \begin{cases} \left(\frac{df}{dx}\right) = \varphi' z \left(\frac{dz}{dx}\right) \\ \left(\frac{df}{dy}\right) = \varphi' z \left(\frac{dz}{dy}\right), \end{cases}$$

men

$$70,\quad \left(\frac{df}{dy}\right) = PM, \left(\frac{df}{dx}\right) = -\,QM\,,$$

altsaa

$$71,\quad Q = -\frac{\varphi' z}{M}\left(\frac{dz}{dx}\right),\quad P = \frac{\varphi' z}{M}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

hvoraf fölger, naar $\frac{\varphi' z}{M}$ elimineres,

$$72,\quad Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0\,.$$

Hvis man nu antager Analysens Fuldkommenhed, hvilket her maa være tilladt, vil enhver Differentialligning af 1ste Orden med to Foranderlige lade sig bringe til denne Form:

$$P\,dy - Q\,dx = 0 \ldots (66),$$

i det P og Q ere Functioner af x og y. Heraf fölger, at Integrationen af en hvilkensomhelst Differentialligning af 1ste Orden med to Foranderlige er identisk med Integrationen af en partiel Differentialligning af samme Orden, som er lineair og mangler et Led, nemlig en Ligning af Formen

$$73, \quad P\,p + Q\,q = 0$$

i det P og Q kun indeholde x og y.

Men det er bekjendt (*Monges appl.* pag. 386), at denne sidste Ligning udtrykker en vis Maade at danne en Overflade (*génération d'une surface*), hvori den caracteristiske Linie (*la caractéristique*) er en plan Curve, som er parallel med Planen xy; hvoraf fölger, at en almindelig Differentialligning med to Foranderlige af förste Orden ogsaa betegner denne Dannelsesmaade. Men dog maa bemærkes, at Ligningen

$$74, \quad P\,p + Q\,q = 0$$

naar P eller Q indeholder z, er mere almindelig, da dens Integral er af denne Form:

$$75, \quad \varphi\,(x, y, z, fz) = 0\,.$$

Af det, som ovenfor er sagt om de særdeles Oplösninger, fölger, at alle de Overflader, som have een og samme partielle Differentialligning af Formen (73), beröres af een og samme cylindriske Overflade, der er parallel med z-Axen.

*Lagrange* har analytisk beviist, at man altid kan oplöse fölgende Problem: "at danne en Differentialligning, der har en given fuldstændig Integralligning og tillige en given særdeles Oplösning." For at oplöse det indförer han en vis, af de givne Betingelser afhængig, Relation imellem to i den givne Integralligning indbefattede constante Störrelser. Vi ville anvende samme Methode paa Overflader, og det er da aabenbart, at hiint Problem reducerer sig til fölgende:

"Naar Ligningen

$$76, \quad F\,(x, y, z, \phi z) = 0$$

er given, i det $F$ betegner en opgiven Function, da at bestemme Functionen $\phi$ saaledes, at den Overflade, som denne Ligning fremstiller, beröres af en given cylindrisk Overflade, som er parallel med z-Axen."

Vi bemærke först, at det er nödvendigt, at Ligningen (76) taber noget af sin Almindelighed ved den Betingelse, at dens Differentialligning med Hensyn paa x og y skal have en given særdeles Oplösning. Thi den Overflade, hvorom her Talen er, skal kunne fremstilles ved en Differentialligning af förste Orden, hvor z antages som arbitrair Constant, hvilken Störrelse man ikke kan eliminere af Ligningen (76) ved Hjelp af dens Differential, undtagen man giver Functionen $\phi$ en bestemt Form. Men Lign. (76) vil, saalænge denne Function forbliver ubestemt, have samme Almindelighed, som en Differentialligning af anden Orden med Hensyn til x og y. Da nu Dannelsen (*génération*) af den Overflade, hvortil Lign. (76) svarer, kan udtrykkes ved en partiel Differentialligning af förste Orden, af Formen

$$P p + Q q = 0$$

i det P og Q indeholde z, saa fölger, at man kan adskille to Former af partielle Differentialligninger af förste Orden og lineaire af Formen:

$$P p + Q q = 0 ,$$

nemlig:

1, Formen $f_1(x, y) \cdot p + f_2(x, y) \cdot q = 0$,

der er ligesaa almindelig, som en almindelig Differentialligning af förste Orden, og

2, Formen $F_1(x, y, z) \cdot p + F_2(x, y, z) \cdot q = 0$,

der indeholder Overflader, som man kun kan fremstille ved almindelige Differentialligninger af anden Orden.

Men en Differentialligning af anden Orden imellem x, y og Diff. Coefficienter er paa den anden Side af större Almindelighed, end en partiel Ligning af förste Orden; thi man kan ligesaavel fremstille ved hiin Ligning enhver Overflade, som indbefattes i Ligningen:

$$77, \quad F(x, y, \varphi z, \psi z) = 0 .$$

Vi betragte denne Ligning istedet for Lign. (76), og bemærke först, at, da denne Ligning indeholder de to vilkaarlige Functioner $\varphi$ og $\psi$, saa vil Resultatet endnu indeholde een vilkaarlig Function. Man vælge först en bestemt Form for $F$, f. Ex.

$$78, \quad x \cdot \varphi z + y \cdot \psi z = 1 .$$

Multipliceres denne Ligning med z og gives de nye vilkaarlige Functioner Benævnelserne $\varphi$ og $\psi$, erholdes

$$79, \quad z = x \cdot \varphi z + y \cdot \psi z .$$

Under denne sidste Form seer man, at ovenstaaende Ligning fremstiller enhver Overflade, der fremkommer ved Bevægelsen af en ret Linie, der altid forbliver parallel med Planen $x y$, og indbefattes fölgelig, som specielt Tilfælde, iblandt de Overflader, som *Monge* har betragtet i *appl. de l'anal. à la géom.* pag. 61 og fölg. I det $\varphi$ og $\psi$ bestandig betegne to vilkaarlige Functioner, kan ovenstaaende Ligning ogsaa skrives saaledes:

$$80, \quad y = x \cdot \varphi z + \psi z \,.$$

Naar z faaer en hvilkensomhelst bestemt Værdie, saa erholdes Ligningen for den rette Linie, der ved sin Bevægelse danner Overfladen (*la génératrice*), i een af dens Stillinger; men, da Overfladen skal beröre et Cylinder, der er lodret paa Planen x, y, saa maa den fundne Ligning være identisk med denne:

$$81, \quad y = x \cdot \frac{dy'}{dx'} - \frac{dy'}{dx'} x' + y' \,,$$

i det $x'$ og $y'$ forbindes ved den for Cylindret givne Ligning:

$$82, \quad y' = f(x') \,.$$

Man vil altsaa have:

$$83, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi z = \dfrac{dy'}{dx'} \\[2mm] \psi z = y' - x' \dfrac{dy'}{dx'} \end{array} \right.$$

Antages dernæst, at $x'$ er en Function af z, saa erholdes Ligningen for den sögte Overflade, som altid vil indeholde en vilkaarlig Function, som man kan eliminere ved Hjelp af partielle Differentialier, saa at den partielle Differentialligning bliver af Formen:

$$\pi_1 (x, y) \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right) + \pi_2 (x, y) \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \,.$$

Differentialligningen af Ligningen (80) (z antagen som vilkaarlig

Constant), efter at $\varphi$ og $\psi$ efter det ovenstaaende ere bestemte, vil nu have

$$y = x \cdot \varphi z + \psi z$$

til fuldstændigt Integral og

$$y = f(x)$$

til særdeles Oplösning.

Antage vi f. Ex., at denne sidste Ligning er

$$y = m x^2 ,$$

saa erholdes

$$\frac{dy}{dx} = 2 m x = \varphi z ,$$

og
$$y - x \cdot \frac{dy}{dx} = - m x^2 = \psi z ;$$

altsaa vil Ligningen for Overfladen være:

$$y = 2 m x\, Fz - m\, (Fz)^2 ,$$

i det $Fz$ er en vilkaarlig Function.
Antages f. Ex.

$$Fz = \frac{z}{m} ,$$

saa er

$$y = 2 x z - \frac{z^2}{m} .$$

Differentieres denne Ligning med Hensyn paa z, erholdes

$$z = m x ;$$

altsaa

$$y = m x^2 ,$$

som særdeles Oplösning af hiin Lignings Differentialligning.

Man seer let, at Functionen $F$ maa altid være vilkaarlig, efterdi Spörgsmaalets Natur blot fordrer, at Overfladen skal beröre Cylindret, uden at bestemme noget om den Curve, i hvilken Berøringen skeer, hvilket afhænger af Functionen $F$.

Det vil nu være let at behandle det Tilfælde, hvor den givne primitive Ligning er af en mere sammensat Form; man seer let, at den maa indbefatte to constante Störrelser, eller vilkaarlige Functioner af z.

$$84, \quad F(x, y, \varphi z, \psi z) = o$$
$$85, \quad f(x') = y'$$

være de tvende opgivne Ligninger. Naar z antages constant, saa skulle, efter Betingelsen, de til Lignn. (84) og (85) svarende Curver altid beröre hinanden. Dersom man altsaa, ved Hjelp af Ligningen (84) og dens Differential med Hensyn paa x og y, bestemmer $\varphi z$ og $\psi z$ ved x, y og $\frac{dy}{dx}$, og dernæst i Resultatet indsætter Værdierne af x, y og $\frac{dy}{dx}$, udtrykte ved x′ efter Ligningen (85), endelig indsætter de fundne Værdier af $\varphi$ og $\psi$ i Lign. (84) og antager $x' = Fz$, saa fremkommer Ligningen for den sögte Overflade. Forresten indsees let, at denne Methode ikke er forskjellig fra *Lagranges* i *leçon* 16*me sur le calcul des fonctions* fremsatte. Men min Hensigt har ogsaa blot været at anvende hans Betragtningsmaade paa Overflader, i det denne Fremstillingsmaade synes mig den meest passende til at gjöre Theorien om de særdeles Oplösninger anskuelig.

Med Hensyn paa de særdeles Oplösningers Construction kunde ogsaa mærkes den særegne Maade, paa hvilken *Poisson* (*Journal de l'école polyt. cah. XIII pag.* 117) construerer disse, ved at tage en Function af x og en ny Foranderlig z til Ordinat, og saaledes aldeles at forandre den givne Curve. Saaledes construeres Ligningen $y = 2ax - a^2$ ved en Række af Curver, der beröre en ret Linie, i det man antager $y = f(x, z)$, og altsaa egentlig construerer Ligningen $f(x, z) = 2ax - a^2$.

## Om de særdeles Oplösninger af Differentialligninger af anden Orden.

Vi have i det Foregaaende betragtet de særdeles Oplösninger af Ligninger af förste Orden som Projectioner af Curver med dobbelt Krumning, der dannes ved en Fölge af Punkter, som danne Overgangen over de efter hinanden fölgende Snit, der gjöres i en Overflade ved en med Planen $x\,y$ parallel Plan, i det denne Overgang antages at skee uden nogen Forandring af $x$ eller $y$, og vi have saaledes fundet Betingelsen for, at en Ligning af förste Orden kan fyldestgjöres ved en særdeles Oplösning.

Vi antage nu som given en Ligning af förste Orden,

$$1,\quad f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z\right) = 0,$$

som udtrykker Relationen imellem $x$, $y$ og $\frac{dy}{dx}$ paa et Sted af Overfladen, hvilket bestemmes ved Værdien af $z$.

Man differentiere denne Ligning i det $z$ antages constant, og man vil erholde:

$$2,\quad f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, z\right) = 0.$$

Elimineres derpaa $z$ ved Hjelp af den foregaaende Ligning, fremkommer:

$$3,\quad f_3\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0;$$

hvilken Ligning man ligeledes kan fyldestgjöre paa to forskjellige Maader, nemlig:

1) i det $z$ antages som vilkaarlig Constant, ved Ligningen (1).

2) ved Projectionen af en Overgangslinie over de forskjellige Parallelsnit, hvilken Overgang da maa skee uden at forandre hverken x, y, eller $\frac{dy}{dx}$. Men heraf fölger igjen, da $\frac{dy}{dx}$ bestemmer Stillingen af Tangenten, der har to successive Punkter tilfælles med Curven, at der altid maa være 4 Punkter, 2 paa det förste Snit og 2 paa det andet, som ligge i to uendelig nær ved hinanden liggende Linier, der ere lodrette paa Planen x, y, eller, med andre Ord, at to og to Tangenter stedse ere parallele, saa at der bestandig findes to Overgangspunkter af den Beskaffenhed, som vi oven have betragtet, og som ligge uendelig nær ved hinanden.

Man veed, at i det Tilfælde, at en Ligning af förste Orden har en særdeles Oplösning, har den Curve, som fremstiller denne, stedse to Punkter tilfælles med Projectionen af hvert Snit i Overfladen, nemlig det Punkt, der danner Overgangen fra det foregaaende Snit og det, igjennem hvilket man gaaer over til det efterfölgende, saa at hiin Curve altid har en fælles Tangent med Projectionen af hvert Snit.

I nærværende Tilfælde har Projectionen altid fire Punkter tilfælles med Projectionen af hvert Snit, nemlig de to Overgangspunkter fra det foregaaende og de to til det efterfölgende, men det förste af det andet Par falder i Projectionen sammen med det andet af det förste Par, efterdi de ligge i samme paa

Planen x y perpendiculaire Linie; altsaa vil hiin Projection altid have tre, ikke i en ret Linie liggende, Punkter tilfælles med Projectionen af hvert Snit, eller, hvad der er det samme, de ville have to successive Tangenter fælles, altsaa fælles Krumningsradius (see *Lacroix traité de calc. diff. et de calc. int. tom.* 2 *pag.* 468 – 69).

Saaledes have vi altsaa bestemt den væsentlige Egenskab ved den Curve, der indeholder den særdeles Oplösning af en Ligning af anden Orden. Men, da Ligningen af 1ste Orden selv er Resultatet af Eliminationen af en vilkaarlig Constant *a* imellem den primitive Ligning

$$4, \quad f(x, y, z, a) = 0$$

og dens Differential med Hensyn til x og y, saa maa Ligningen (1) af förste Orden betragtes som henhörende paa eengang til en Uendelighed af Snit, hvori een og samme med Planen x y parallele Plan skjærer en Uendelighed af Overflader, der ere fremkomne ved Forandringen af *a* i Ligningen (4). Ligeledes betragtes Ligningen af anden Orden (3), som paa eengang henhörende til alle de Snit, der gjöres i alle de Overflader, som fremkomme ved Forandringen af *a*. Den særdeles Oplösning af Ligningen af anden Orden maa altsaa betragtes som en Uendelighed af Projectioner paa Planen x, y, hvis fælles Egenskab udtrykkes ved Ligningen:

$$5, \quad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

som fremkommer ved Eliminationen af z imellem Ligningen (1) og dens Differential med Hensyn til z alene.

Men herved er en Omstændighed at mærke. For at Betingelsen for en særdeles Oplösning (pag. 135, No. 2) kan opfyldes, er det ikke nödvendigt, at de fire ovenomtalte Punkter findes alle paa *een* af de ved Lign. (4) givne Overflader; dette er endog det sjeldneste Tilfælde. Tvertimod vil Betingelsen aabenbart være opfyldt, naar der blot altid findes 4 Punkter, to og to i een og samme Perpendiculair paa Planen x, y og uendelig nær hinanden, om endog f. Ex. de to förste findes paa den Overflade, der svarer til Ligningen

$$f(x, y, z, a) = 0 \; \ldots . \; (4)$$

og de to næste paa den, der svarer til Ligningen

$$6, \; f(x, y, z, [a + d\,a]) = 0$$

hvilket indsees deraf, at Ligningen af förste Orden (1,) ikke indeholder $a$.

Denne Bemærkning leder til en Adskillelse af flere Tilfælde, nemlig:

1) Naar *enhver* af de Overgangslinier, hvis Projectioner danne den særdeles Oplösning for Ligningen af anden Orden, findes paa *een enkelt* af de ved Forandringen af $a$ fremkommende Overflader, saa vil der altid findes to forenede særdeles Oplösninger for Ligningen af förste Orden

$$7, \; F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0,$$

hvilken Ligning da vil fyldestgjöres ved Integralet af Ligningen (5), nemlig:

$$8, \; \Phi(x, y, a) = 0,$$

som særdeles Oplösning, hvilken vil bestaae af to Curver, der falde sammen. (Man eftersee *Lacroix traité du calc. diff. et du calc. int. tome* 2 *pag.* 469, *tome* 1 *pag.* 492 og fölg.).

2) Dersom man kun i et endeligt Antal af Punkter i ethvert Snit kan gaae over til det fölgende paa den oven beskrevne Maade, saa vil Overgangslinierne og fölgelig ogsaa deres Projectioner være af endeligt Antal, og fölgelig ikke fremstilles ved en Differentialligning. Altsaa vil i dette Tilfælde den særdeles Oplösning være en Ligning uden Differentialcoefficienter og uden vilkaarlig Constant. (See *Lacroix traité du calc. diff. et du calc. int. tom.* 2 *pag.* 378).

3) Hvis intet af disse to Tilfælde har Sted, hvilket er det sædvanligste, saa vil den særdeles Oplösning fremstilles ved en Ligning af förste Orden, hvis Integral ikke vil fyldestgjöre Ligningen (7).

Ved denne Leilighed bemærke vi, at det let indsees, hvorfor den særdeles Oplösning af en Ligning af förste Orden, der selv er særdeles Oplösning af en Ligning af anden Orden (den af *Lagrange* benævnte *solution particulière double*) ikke fyldestgjör den givne Ligning af anden Orden; thi kun de i det fuldstændige Integral af Ligningen (5) indbefattede Curver have den dertil nödvendige Betingelse.

Ved Hjelp af de ovenstaaende Betragtninger kan man geometrisk angive Grunden for det vigtige Theorem, som *La-*

*grange* analytisk har beviist, at man nemlig altid finder samme særdeles Oplösning for en Ligning af anden Orden, af hvilket af dens to Integraler af förste Orden man end udleder den.

Betragter man nemlig de to Ligninger af förste Orden

$$f_1 \left(x, y, \frac{dy}{dx}, z,\right) = o \ldots (1)$$

og $$F_1 \left(x, y, \frac{dy}{dx}, a,\right) = o \ldots . (7)$$

og forandrer blot z i den förste, saa gjennemgaaer man alle de successive Snit i en Uendelighed af Overflader, og i de Punkter, der have den oven beskrevne Egenskab. Forandres *a* i den anden Ligning, uden tillige at forandre x, y eller $\frac{dy}{dx}$, saa gaaer man i en Uendelighed af Snit over fra en Curve til en anden paa det Sted hvor disse have fælles Tangent. Her skeer altsaa samme Operation paa eengang i alle Snit, som för skete paa eengang i alle de ved Forandringen af *a* fremkomne Overflader. Man vil altsaa i begge Tilfælde finde de samme Overgangspunkter, kun i forandret Orden, altsaa og de samme Projectioner. Det indsees iövrigt let, at man kunde före samme Raisonnement ved at ombytte z og *a* i Ligningerne (1) og (7).

---

Hvad angaaer de særdeles Oplösninger af Ligninger af höiere Ordener, da vil disses geometriske Fremstilling ved

Overflader udentvivl ikke være istand til at bringe större Klarhed tilveie, end Betragtningen af plane Curver, i det enhver höiere Orden medförer en ny vilkaarlig Constant, hvorved Betragtningerne stedse blive mere og mere sammensatte. Det ovenfor fremsatte viser noksom, hvor meget der allerede tabes i Tydelighed ved Overgangen fra förste til anden Orden.